附加數學(A. Math):公式大全—向量篇

一個具有大小的量稱為**向量**.

$\vec{0}$ − −零向量的方向是無法確定的

向量的運算 : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.如$\vec{a}$與$\vec{b}$是長度相同,但方向相反的向量.則$\vec{a}=-\vec{b}$

若一個向量的模爲1單位,則稱此向量爲單位向量.

$$\hat{u}=\frac{1}{\left|\vec{u}\right|}\vec{u}$$

位置向量

定義 : 如果我們在平面上選擇一固定點O,則平面上任何一點P的位置向量可用$\overrightarrow{OP}$來表示.

而向量$\overrightarrow{OP}$稱爲點P關於點O的位置向量,而固定點O則稱爲原點.

$\overrightarrow{PQ}=\vec{q}-\vec{p}$

若點P內分線段AB成$m:n$,即$AP:PB=m:n$,及$\vec{a},\vec{b},\vec{p}$爲$\vec{A},\vec{B},\vec{P}$對於點O的位置向量.

則$\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$

若M爲AB中點,即$m:n=1:1$,則$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$

若$P(x,y)$爲直角坐標平面上的任意一點,

則它關於原點O的位置向量$\overrightarrow{OP}$可以分解成x軸方向及y軸方向上的兩個分向量.

設$\vec{i}$爲x軸正方向上的單位向量,$\vec{j}$則爲y軸正方向上的單位向量.

則$\overrightarrow{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}, \left|\overrightarrow{OP}\right|=\sqrt{x^2+y^2}, \tan q=\dfrac{y}{x}$

而單位向量$\vec{i}$及$\vec{j}$稱爲基本單位向量.直角坐標平面上任何一個向量皆可用$\vec{i}$及$\vec{j}$表示.

兩向量的純量積定義 : 二向量的乘積爲純量積,$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos q$.注意 : 向量尾和尾才是夾角.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}, \vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2$.

對於單位向量$\vec{i}$及$\vec{j}$: $\vec{i}\cdot\vec{i}=\left|\vec{i}\right|^2=1$及$\vec{j}\cdot\vec{j}=\left|\vec{j}\right|^2$

對於非零向量$\vec{a}$和$\vec{b}$, $\vec{a}\perp\vec{b}$當且僅當$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.由此$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=0$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$

$$\cos q=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

$x\vec{i}+y\vec{j}=\vec{0}$,則$x=y=0$

$x_1\vec{i}+y_1\vec{j}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}$,則$x_1=x_2, y_1=y_2$.其中$\vec{i}$及$\vec{j}$互不平行.

附加數學(A.Math)—公式大全—二次函數方程及不等式;正整指數的二項式定理

$ax^2+bx+c=0$

配方法:

若x^2係數1就易,

將x係數除以2,

連隨加上佢平方,

完全平方就出現.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$ax^2+bx+c=0$

兩根之和 $=a+b=-\frac{b}{a}$

兩根之積 $=ab=\frac{c}{a}$

製作一元二次方程 : x^2-(兩根之和)$x+$(兩根之積)$=0$

一元二次函數圖像極大/極小點 : $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$

不等式性質:

設a,b,c爲實數

(1)若$a>b$及$b>c$,則$a>c$

(2)若$a>b$,則$a+c>b+c$

(3)若$a>b$及$c>0$,則$ac>bc$及$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

(4)若$a>b$及$c<0$,則$ac<bc$及$\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

(5)對於一切實數a, $a^2\geq 0$

(6)若$a>b$及$ab>0$,則$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

一元二次不等式:

若$ab>0$,則$\begin{cases}a>0\\b>0\end{cases}$或$\begin{cases}a<0\\b<0\end{cases}$

若$ab<0$,則$\begin{cases}a>0\\b<0\end{cases}$或$\begin{cases}a<0\\b>0\end{cases}$

圖解法:

1.若$ax^2+bx+c>0$,則$x<a$或$x>b$

2.若$ax^2+bx+c=0$,則$x=a$或$x=b$

3.若$ax^2+bx+c<0$,則$a<x<b$

分式不等式:

$\frac{p}{q}\geq 0$, $pq\geq 0$及$q\neq 0$

$\frac{p}{q}\leq 0$, $pq\leq 0$及$q\neq 0$

若$\frac{p}{q}>0$,則$pq>0$及$q\neq 0$

若$\frac{p}{q}<0$,則$pq<0$及$q\neq 0$

絕對值不等式

$|x|=-(-x)$

$|x|=\begin{cases}x, 當x>0\\-x, 當x\leq 0\end{cases}$

當$a>0$,

$|x|=a$相當於$x=a$或$x=-a$,

$|x|<a$相當於$-a<x<a$,

$|x|>a$相當於$x<-a$或$x>a$.

階乘的定義:

$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 1$

$0!=1$

$C_r^n=\frac{n!}{r!(n-r)!}$

$C_r^n=C_{n-r}^n$

$C_r^{n+1}=C_r^n+C_{r-1}^n$

$C_n^n=C_0^n=1$

$C_r^n+C_{r+1}^n=C_{r+1}^{n+1}$

若n爲正整數,則$(x+y)^n=x^n+C_1^n x^{n-1}y+\cdots+C_r^n x^{n-r}y^r+\cdots+y^n$

注意:若n爲正整數,則$(x+y)^n$的第$r+1$項$=C_r^n x^{n-r}y^r$

附數公式大全:三角公式及求積公式

$$\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B$$

$$\cos(A\pm B)=\cos A\cos B\mp\sin A\sin B$$

$$\tan(A\pm B)=\frac{\tan A\pm\tan B}{1\mp\tan A\tan B}$$

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$$

$$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$$

$$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$$

參考公式

球 體	表 面 積	=	$4\pi r^2$
	體 積	=	$\frac{4}{3}\pi r^3$
圓 柱	側 面 積	=	$2\pi rh$
	體 積	=	$\pi r^2 h$
圓 錐	側 面 積	=	πrl
	體 積	=	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$
角 柱	體 積	=	底面積 × 高
角 錐	體 積	=	$\frac{1}{3}$ × 底面積 × 高

弧長 $= s = rq$

扇形面積 $= A = \frac{1}{2}r^2 q$

$\sin^2 q + \cos^2 q = 1$

$1+\tan^2 q = \sec^2 q$

$1+\cot^2 q = \csc^2 q$

重要 : $\cos(-q) = \cos q, \sec(-q) = \sec q$

$y = A\sin x$圖像, y軸數值爲$y=\sin x$的A倍.

$y=\sin wx$圖像, x軸數值爲$y=\sin x$的$1/w$倍.

$y=\sin(x+f)$圖像 : 若f值爲正數,則圖像向左移;若f值爲負數,則圖像向右移.

正弦公式 : $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$,*注意 : 使用此公式時可能有兩個答案.

餘弦定律 : $CosA=\frac{b^2+c^2-a^2}{2ab}, a^2=b^2+c^2-2bc\cos a$

若$t=\tan\frac{q}{2}$,

補助角 : $a\sin q + b\cos q = \sqrt{a^2+b^2}\cos(q-a)$,其中$\tan q=\frac{a}{b}$

$\sin q = \frac{2t}{1+t^2}, \cos q = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \tan q = \frac{2t}{1-t^2}$

倍角公式 : $\sin 2q = 2\sin q\cos q$

$\cos 2q = \cos^2 q - \sin^2 q = 2\cos^2 q - 1 = 1 - 2\sin^2 q$

$\tan 2q = \frac{2\tan q}{1-\tan^2 q}$

$\sin 3q = 3\sin q - 4\sin^3 q$

$\cos 3q = 4\cos^3 q - 3\cos q$

$\tan 3q = \frac{3\tan q - \tan^3 q}{1-3\tan^2 q}$

方程,主值區間,通解

$\sin q = a, a=\sin^{-1}a$是在$[-\frac{p}{2},\frac{p}{2}], q = np + (-1)^n a$

$\cos q = a, a = \cos^{-1}a$是在$[0,p], q = 2np \pm a$

$\tan q = a, a = \tan^{-1}a$是在$(-\frac{p}{2},\frac{p}{2}) q = np + a$

*$[-\frac{p}{2},\frac{p}{2}]$包括$-\frac{p}{2},\frac{p}{2}$兩點;$(-\frac{p}{2},\frac{p}{2})$不包括$-\frac{p}{2},\frac{p}{2}$兩點

半角公式 : $\sin^2\frac{q}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos q).\cos^2\frac{q}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos q)$

附數公式大全:複數及微分(一)函數極限與導數

複數的定義: $i^2 = -1$

複數的標準式: z = a + bi，其中 a,b 皆為實數

若 a+bi=c+di,其中 a,b,c,d 皆為實數,則 a=c,b=d

注意:複數是沒有大小的比較

複數軌跡問題:設$z = x + yi$

$$(\cos q_1 + i\sin q_1)(\cos q_2 + i\sin q_2) = \cos(q_1 + q_2) + i\sin(q_1 + q_2)$$

複數的極式: $z = r(\cos q + i\sin q) = r(cisq)$

1)其中z的模,即$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$

2)z的輻角q,記爲$\arg z$,它滿足: $\tan q = \dfrac{b}{a}$ ($\mathbf{Q}$ $a = r\cos q, b = r\sin q$), arg 性質類似log.

注意:輻角只限於$-p < q < p$之主値範圍內.

若$z_1 = r_1(\cos q_1 + i\sin q_1)$及$z_2 = r_2(\cos q_2 + i\sin q_2)$

則$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(q_1 + q_2) + i\sin(q_1 + q_2)]$

即$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

及$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(q_1 - q_2) + i\sin(q_1 - q_2)]$

即$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}, \arg(\dfrac{z_1}{z_2}) = \arg z_1 - \arg z_2$

$\left|\dfrac{z_1 z_2}{z_3}\right| = \dfrac{|z_1| \cdot |z_2|}{|z_3|}, |z^n| = |z|^n, |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

共軛複數:

若$z = a + bi$,則z的共軛複數爲$\bar{z} = a - bi$

若z爲方程$f(x) = 0$的根,則$\bar{z}$也爲$f(x) = 0$的根

$|\bar{z}| = |z|, \arg \bar{z} = -\arg z$

$z + \bar{z} = 2a, z - \bar{z} = 2bi$

$\bar{\bar{z}} = z, z\bar{z} = |z|^2$

$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

$\overline{(\dfrac{z_1}{z_2})} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (若$z_2 \neq 0$)

棣美弗定理

若n爲一整數,則$(\cos q + i\sin q)^n = \cos nq + i\sin nq$

若n爲一有理數,則$\cos nq + i\sin nq = (\cos q + i\sin q)^n$的其中一個值.

複數的n次方根

1)若$z^n = r(\cos q + i\sin q)$,則$z_k = r^{\frac{1}{n}}(\cos\dfrac{2kp + q}{n} + i\sin\dfrac{2kp + q}{n})$

其中$k = 0,1,2\ldots, n-1$爲$r(\cos q + i\sin q)$的n個相異n次的方根.

注意:此式如以度數表示,則是$z_k = r^{\frac{1}{n}}(\cos\dfrac{360^\circ k + q}{n} + i\sin\dfrac{360^\circ k + q}{n})$

2)因此,1的n次方根爲$z_k = \cos\dfrac{2kp}{n} + i\sin\dfrac{2kp}{n}$, 其中$k = 0,1,2\ldots, n-1$.

三角函數極限:

若q的單位是弧度,則$\lim\limits_{q \to 0}\dfrac{\sin q}{q} = 1$

若$z = \cos q + i\sin q$,則$z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\cos nq$及$z^n - \dfrac{1}{z^n} = 2i\sin nq$

若w爲1的複數立方根,即$w^3 = 1$,則$1 + w + w^2 = 0$

微增量

$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$

基本原理

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

附數公式:解析幾何(坐標系, 直線及圓)

兩點間距離公式: $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

分點(截點)公式: $P(x,y)=(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\frac{ny_1+my_2}{m+n})$

點P是指連結點$A(x_1,y_1)$和$B(x_2,y_2)$的線上之分點,且分比爲$m:n$.

直線的斜率 $=m=\tan q=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$;已知直線$L_1$和$L_2$的斜率分別爲$m_1$和$m_2$:

$a)$若f爲L_1和L_2所夾的銳角,則$\tan f=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$

$b)m_1$和m_2當且僅當$L_1 // L_2$

$c)m_1m_2=-1$當且僅當$L_1 \perp L_2$

直線之標準方程是 : Ax+By+C=0

對於一對平行直線方程的差異只在於 C 的數值是有所不同.

例題:已知直線 L_1 通過點(-3,1)且平行於直線 L_2:2x-3y+1=0.試求 L_1 的方程:

解:∵$L_1//L_2$ ⇒ ∴ L_1:2x-3y+k=0,其中 k 為一常數

⇒ ∵L_1 通過(-3,1) ⇒ ∴ 2(-3)-3(1)+k=0 ⇒k=9 ∴L_1 的方程:2x-3y+9=0

將一般式方程$Ax+By+C=0$化爲法線式的方法: $\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$

在這裏,選取$\sqrt{A^2+B^2}$前±符號的法則是:

$a)$若$C\neq 0$,則取與C相反的符號;

$b)$若$C=0$和$B\neq 0$,則取與B相同的符號.

由點$P(x_1,y_1)$至直線$Ax+By+C=0$的距離$d=\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$

在這裏,選取$\sqrt{A^2+B^2}$前±符號的法則是:

$a)$當直線並不通過原點,若P和原點在直線的不同傍,則d爲正.

$b)$若P和原點在直線的同傍,則d爲負.

法線式:xcosθ+ysinθ-p=0

直線族的方程為$(A_1x+B_1y+C_1)+k(A_2x+B_2y+C_2)=0$,其中 k 為一任意常數.

求動點的**軌跡**的一般**方法**: a)設動點的**坐標為 P(x,y)**

b)根據已條條件列出算式,而求出關於 x 和 y 的方程.經**簡化**後的方程就是該動點的軌跡.

圓之標準方程 : $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ ⇒ 圓心 = (h,k) ⇒ 半徑 = r

圓之一般方程 : $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ ⇒ 圓心 = (-D/2,-E/2) ⇒ 半徑 = ½ $(D^2+E^2-4F)^{1/2}$

一圓之直徑的二端點分別為 $A(x_1,y_1)$和 $B(x_2,y_2)$,則此圓的方程為$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

圓和直線之交點數目可從聯立圓和直線的方程中的判別式Δ的大小求得.

圓之切線方程:$x_1x+y_1y+ ½ D(x+x_1)+ ½ E(y+y_1) + F = 0$

由圓外一點至圓的切線長度 = t = $[(x_1-h)^2+(y_1-k)^2-r^2]^{1/2}$ 或 $[x_1^2+y_1^2+Dx_1+Ey_1+F]^{1/2}$

圓心為(h,k)的同心圓族為: $(x-h)^2+(y-k)^2=K$,其中 K 是一個常數. 經過一個直線及一個圓的交點的圓族為:$x^2+y^2+Dx+Ey+F+k(Ax+By+C)=0$,其中 K 是一個常數.

圓族的方程為 $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+k(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$,其中 K 是一個常數.

如果 k=-1,這則方程可化為$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)=0$